11、设向量$\boldsymbol{v}_1=(0,x,z),\boldsymbol{v}_2=(y,0,1)$，记$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$，则$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=$

1）叉乘获得向量

$$\begin{vmatrix} 0 & x & z & 0 & x \\ y & 0 & 1 & y & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow F(x,y,z)=x\,i+yz\cdot j+(-xy)\,k$$

$x \quad yz \quad -xy$

2) 根据三度的计算公式 $x'_x+(yz)'_y+(-xy)'_z=1+z+0=1+z$

答案 $1+z$

12、极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right]=$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

答案 $\frac{1}{2}$

13、设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=t+\cos t\end{cases},\left(t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$确定，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$

$$\begin{cases}x'_t=2\cdot2\sin t\cdot\cos t=2\sin2t\\ y'_t=1-\sin t\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\sin t}{2\sin2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{1-\sin t}{2\sin2t}\right)'}{2\sin2t}=\frac{\frac{1}{2}\left[-\cos t\cdot\sin2t-(1-\sin t)\cdot\cos2t\cdot2\right]}{2(\sin2t)^3}$$

代入$t=\frac{\pi}{4}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)-0}{2}=-\dfrac{\sqrt2}{8}$

答案：$-\frac{\sqrt{2}}{8}$

14、$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=$

$$\int_1^{+\infty}\ln(x+1)\,d\frac{-1}{x}=-\frac{\ln(1+x)}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln 2+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\ln 2+\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\ln 2-\ln\frac{1}{2}=2\ln 2$$

答案：2ln2

15、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$，$m(X)$，是矩阵 X 的实特征值的最大值，

且 $m(A)<m(B)$，求 a 的取值范围是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-2&\lambda-a&-2\\0&-2&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left[(\lambda-a)^2-4\right]=(\lambda-1)(\lambda-a+2)(\lambda-a-2)$$

$\lambda_1=1\quad\lambda_2=a-2\quad\lambda_3=a+2$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-a&1&1\\1&\lambda-2&-1\\1&1&\lambda-a\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{vmatrix}\lambda-1-a&0&1+a-\lambda\\1&\lambda-2&-1\\1&1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

c_1加至c_3 $$\begin{vmatrix}\lambda-1-a&0&0\\1&\lambda-2&0\\1&1&\lambda+1-a\end{vmatrix}=(\lambda-1-a)(\lambda-2)(\lambda+1-a)$$

$\lambda_1=a+1\quad\lambda_2=2\quad\lambda_3=a-1$

则 $m(A)$ 为 $\lambda_1=1$ 或 $\lambda_3=a+2$，$m(B)$ 为 $\lambda_1=a+1$ 或 $\lambda_2=2$

当 $m(A)=1$，有 $a+2\le 1 \Rightarrow a\le -1$，则 $m(B)=2$ 成立

当 $m(A)=a+2$，有 $a+2\ge 1 \Rightarrow a\ge -1$，则有 $a+2<2 \Rightarrow a<0 \Rightarrow a\in[-1,0)$

综上得到范围为 $a<0$

16、设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从参数为 3 的泊松分布，且 X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$

1）根据题干有 $Cov(X,Y-X)=0$

有 $Cov(X,Y)-DX=Cov(X,Y)-1=0$，得 $Cov(X,Y)=1$

2）根据公式 $EXY=EXEY+Cov(X,Y)$

$=1\cdot 3+1=4$

答案 4