帆哥手写版2026真题解析**数一 选择**

2025年12月21日 14:20

1、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$（a 是非零常数）确定，则

A、$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$　　B、$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$

C、$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$　　D、$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$

【答案】A

【解析】

方法一 微分法求偏导数，**可以一次求两个偏导数**

$$dx-adz=e^{y+az}(dy+adz)$$

$$dx-e^{y+az}dy=a\cdot(1+e^{y+az})dz$$

则有 $dz=\frac{1}{a(1+e^{y+az})}dx-\frac{e^{y+az}}{a(1+e^{y+az})}dy$

则有 $z_x-z_y=\frac{1}{a}$

选择A选项

2、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 的收敛域

【分数】5

【选项】

A、$[-2,2]$

B、$[-1,1]$

C、$(-2,2)$

D、$(-1,1)$

【答案】D

方法一 排除法　当 $x=\pm2$ 时，$u_n=[3+(-1)^n]^n$　$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$

则排除A C 选项

当 $x=\pm1$ 时，$u_n=\left[\frac{3+(-1)^n}{4}\right]^n$　$\lim_{n\to\infty}u_{2n}\neq0$

则排除B选项

选择D选项

方法二 根植法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+(-1)^n}{4}\right|\cdot|x|^2<1$

$$=\begin{cases} n=\text{偶数} & 1\cdot|x|^2<1 \Rightarrow |x|<1 \\ n=\text{奇数} & \frac{1}{2}\cdot|x|^2<1 \Rightarrow |x|<\sqrt{2} \end{cases}\Bigg\}\ \text{交集得 } |x|<1$$

端点处：当$|x|=1$时 $u_n=\left[\frac{3+(-1)^n}{4}\right]^n$ $\lim_{n\to\infty}u_{2n}\neq 0$

于是得到收敛域为 $x\in(-1,1)$

选择D选项

3、设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义，则有

A、当 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，$(0,1)$ 内单调递增时，$f(0)$ 是极小值

B、当 $f(0)$ 时极小值时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，$(0,1)$ 内单调递增

C、当 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 区间内是凹的时，$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 上单调递增

D、当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 内单调递增时，$f(x)$ 内的图形在区间 $[-1,1]$ 内是凹的

【答案】C

A 当函数在【-1，1】上为连续函数时，选项才正确

例 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ 1 & x=0 \end{cases}$

B 极值点的判断只有充分条件，例 $f(x)=\begin{cases} x & x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ -2 & x=0 \end{cases}$

C 当 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上为凹函数时 有 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)\geq 0$（仅有有限个等于零的点成立）

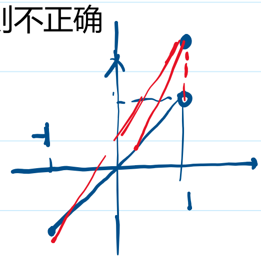
则有 $f'(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上单调递增

根据拉格朗日中值定理 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(\xi)$ $\xi\in(x,1)\in[-1,1]$ 则满足单调递增

C正确

D 当函数在x=1处不连续时，则不正确

例 $f(x)=\begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 2 & x=1 \end{cases}$



$k=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\uparrow$ 但图像没有凹凸性

选择C

4、设 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$ 两个曲面相交的有界闭区域为 Ω，$f(u)$ 为连续函数，

求 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$ 可以表示为

A、$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)r\mathrm{d}z$

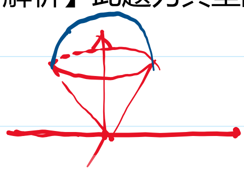
B、$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)r\mathrm{d}z$

C、$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

D、$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

【答案】C

【解析】此题为典型的冰淇淋结构，**使用球面坐标系**



$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^2 f(r^2)\, r^2 dr$

选择C选项

5、单位矩阵经过若干次两行互换得到的矩阵称为置换矩阵，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶置换矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

A、$\boldsymbol{A}^*$ 为置换矩阵

B、$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为置换矩阵

C、$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$

D、$\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^*$

【答案】B

【解析】根据题干，置换矩阵为 $(E_{ij})^n E=(E_{ij})^n=\begin{cases} E & n=偶数 \\ E_{ij} & n=奇数 \end{cases}$

【解析】根据题干，置换矩阵为 $(E_{ij})\cdot E=(E_{ij})=$ E_{ij} n=奇数

A $A^*=|A|A^{-1}\begin{cases} n=偶数 & |E|\cdot E^{-1}=E \\ n=奇数 & |E_{ij}|\cdot E_{ij}^{-1}=-1\cdot E_{ij}=-E_{ij} \end{cases}$

则A不正确

B $A^{-1}=\begin{cases} E^{-1}=E & n=偶数 \\ E_{ij}^{-1}=E_{ij} & n=奇数 \end{cases}$

吻合题干中置换矩阵的定义，则B正确

当n=偶数，$A^{-1}=A^*$ 当n=奇数 $A^{-1}=-A^*$

则选择B

6、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 的列向量均可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性表示，则

A、$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

B、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

C、$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

D、$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

【答案】A

【解析】A的列向量均可由B的列向量线性表出则有

$\Rightarrow\begin{cases} r(A)\le r(B) \\ r(B\ A)=r(B) \end{cases}$

A $Ax=\beta$ 有解 $\Rightarrow$ β可由A的列组线性表出

β可由部分组线性表出，则一定可以由全部组线性表出

则β可由B的列组线性表出，于是 $Bx=\beta$ 有解.

选择A选项

7、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，若方程 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示的曲面为圆柱面，则

A、$a=-4$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的规范形为 $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

B、$a=-4$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换下的标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$

C、$a=2$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的规范形为 $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

D、$a=2$，在 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正交变换下的标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$

【答案】B

【解析】圆柱面 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 的惯性指数为两负一零

则答案选择B 或者D，

因为有零惯性指数，则二次型矩阵行列式为零，
且惯性指数为两负一零，则二次型矩阵的秩为2

根据行和列和相等行列式口算模型

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=(a+4)(a-2)^2=0 \quad \begin{cases} a=2 & r(A)=1 \ (舍) \\ a=-4 & r(A)=2 \end{cases}$$

则口算选择B选项

8、设随机变量 $X \sim N(1,2)$，$f(t)=E\left[(X+t)^2\right]$，则 $f(t)$ 的最小值点与最小值为

【分数】5

【选项】

A、1, 2　　　　B、1, 4

C、-1, 2　　　　D、-1, 4

【答案】C

$$\begin{aligned} E\left((X+t)^2\right) &= D(X+t)+[E(X+t)]^2 \\ &= DX+(EX+t)^2 \\ &= 2+(1+t)^2 \end{aligned}$$

则当t=-1的时候，取得最小值，最小值为 2

选择C选项

9、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，随机变量 Y 的分布函数为 $F(aY+b)$，X 的数学期望为 μ，方差为 $\sigma^2(\sigma>0)$，若 Y 的数学期望与方差分别为 0 和 1，则

【分数】5

【选项】

A、$a=\sigma,b=\mu$　　B、$a=\sigma,b=-\mu$

C、$a=\frac{1}{\sigma},b=\mu$　　D、$a=\frac{1}{\sigma},b=-\mu$

【答案】A

【分析】令 $X=aY+b \Rightarrow \begin{cases} EX=aEY+b=0+b=b=\mu \\ DX=D(aY+b)=a^2DY=a^2=\sigma^2 \end{cases}$

则得 $a=\sigma$, $b=\mu$

选择A选项

10、设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}(k=1,2,\cdots)$，则对于任意的正整数 m,n 有

【分数】5

【选项】

A、$P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>m\}$

B、$P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>n\}$

C、$P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>m\}$

D、$P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>n\}$

【答案】D

【解析】根据条件概率公式

$$P\{X>m+n|X>m\}=\frac{P\{X>m+n,X>m\}}{P\{X>m\}}=\frac{P\{X>m+n\}}{P\{X>m\}}=\frac{\sum_{k=m+n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)}{\sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)}$$

根据等比级数的求和公式 $\sum_{k=m}^{+\infty}=\frac{a_m}{1-q}$

则有 $\sum_{k=m+n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)=\frac{(\frac{1}{2})^{m+n+2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{(\frac{1}{3})^{m+n+1}}{1-\frac{1}{3}}=(\frac{1}{2})^{m+n+1}+\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{m+n+1}$

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)=\frac{(\frac{1}{2})^{m+2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{(\frac{1}{3})^{m+1}}{1-\frac{1}{3}}=(\frac{1}{2})^{m+1}+\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{m+1}$$

同理有 $P\{X>n\}=(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{n+1}$

特例法 具体化，令m=1，n=2则有

$$P\{X>3|X>1\}=\frac{(\frac{1}{2})^{4}+\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{4}}{(\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{2}}=\frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{54}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{35}{432}}{\frac{5}{12}}$$

$P\{X>1\}=\frac{5}{12}$ $P\{X>2\}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{8}+\frac{1}{18}=\frac{13}{72}$

$$\boxed{\text{而 } \frac{35}{432}>\frac{5}{12}\cdot\frac{13}{72}=\frac{65}{72\cdot 12}=\frac{\frac{65}{2}}{432}}$$

则有D选项正确