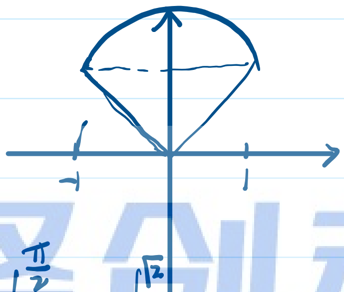
帆哥手写版2026真题解析**数二 大题**

2025年12月21日 14:22

17、计算 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$

累次积分必换序



则 $I=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt2} r\sin\theta\cdot\sin r\cdot r\,dr$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\sqrt2} r^2\cdot\sin r\,dr$

$r^2 \ \oplus\ 2r \ \ominus\ 2 \ \oplus\ 0$

$\sin r \quad -\cos r \quad -\sin r \quad \cos r$

$=2(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(-r^2\cos r+2r\sin r+2\cos r\right)\Big|_0^{\sqrt2}$

$=\sqrt2\left(-\cancel{2\cos\sqrt2}+2\sqrt2\sin\sqrt2+\cancel{2\cos\sqrt2}-2\right)$

$=4\sin\sqrt2-2\sqrt2$

18. 设 $g(x)$ 连续，$f(x)=\int_0^{x^2}g(xt)dt$，求 $f'(x)$ 的表达式，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{x}\int_0^{x^2}g(xt)\,d(xt)\ \underline{\underline{\text{令}xt=u}}\ \frac{1}{x}\int_0^{x^3}g(u)\,du & x\neq0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}\int_0^{x^3}g(u)\,du+\frac{1}{x}\cdot3x^2\cdot g(x^3) & x\neq0\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3}g(u)\,du}{x^2}\end{cases}$$

$$\overset{L'}{=}\lim_{x\to0}\frac{3x^2\cdot g(x^3)}{2x}=0$$

则 $$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}\int_0^{x^3}g(u)\,du+3x\,g(x^3) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则 $f(x)=\begin{cases} \cdots & \cdots \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\int_0^{x^3} g(u)\,du}{x^2} + 0$$

$$\overset{L}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{-3x^2\cdot g(x^3)}{2x} = 0 = f(0)$$

则 $f(x)$在$x=0$处连续

19、求函数 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$ 的极值.

步骤一 获得驻点

$$\begin{cases} f_x' = 4x\cdot e^x + (2x^2-y^2)e^x = e^x\cdot(2x^2+4x-y^2) = 0 \quad ① \\ f_y' = -2y\cdot e^x = 0 \quad ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} ② = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{当}y=0\text{，代入①式，} 2x^2+4x=0 \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-2 \end{cases}$$

获得两个驻点 $(0,0)$和$(-2,0)$

步骤二 求ABC

$A = e^x(2x^2+4x-y^2+4x+4)$

$B = -2ye^x$

$C = -2e^x$

①代入$(0,0)$ $AC-B^2 = 4\cdot(-2) - 0 = -8 < 0$ 否

②代入$(-2,0)$ $A=-4 \quad B=0 \quad C=-2e^{-2}$

$AC-B^2 = 8e^{-2} > 0 \quad A=-4<0$

$(-2,0)$为极大值点，

$f(x,y)$在点$(-2,0)$处取极大值$8e^{-2}$

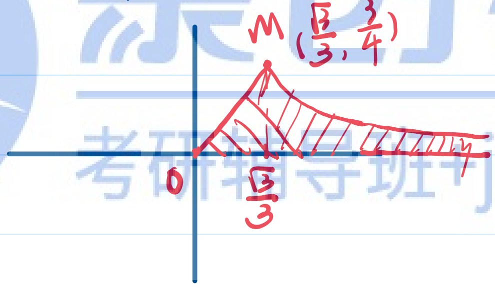
20、设 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x\geq 0)$ 的拐点，O 为坐标原点，区域 D 是第一象限中 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x\geq x_0)$ 曲线，线段 OM 及 x 轴正半轴围成的无界区域，求区域 D 绕着 x 轴旋转所生成的旋转体的体积.

步骤一 计算拐点

$$y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\qquad y''=-2\cdot\frac{(1+x^2)^2-x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=0$$

有 $1+x^2-4x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $y=\frac{3}{4}$

步骤二



二重积分计算旋转体体积

1）直线OM方程 $y=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}x=\frac{3}{4}\sqrt{3}x$

2）曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}x\right)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$$

$$V_2=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\xlongequal{x=\tan t}\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

则 $V=V_1+V_2=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$

21、求微分方程 $x^2y''-2xy'-(y')^2=0(x>2)$ 满足 $y\Big|_{x=3}=\dfrac{1}{2},y'\Big|_{x=3}=-9$ 的解.

方法一 凑成v/u的导数

方法一 凑成v/u的导数

$$x^2y'' - 2xy' = (y')^2$$

$$\frac{x^2y''-2xy'}{(y')^2} = 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{x^2}{y'}\right)' = 1$$

有 $\frac{x^2}{y'} = -x + C_1$

代入 $x=3,\ y'=-9$, $-1=-3+C_1 \Rightarrow C_1 = 2$

$$y' = \frac{x^2}{2-x} = \frac{x^2-4+4}{-(x-2)} = -(x+2) - \frac{4}{x-2}$$

$$y = -\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - 4\ln(x-2) + C \quad (x>2)$$

代入 $x=3$ $y=\frac{1}{2}$ $C=11$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 4\ln(x-2) + 11$$

方法二 一般思路，可降阶微分方程

22、已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，设 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，$\mathbf{G} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组

（2）求矩阵 $\mathbf{H}$ 有 $\mathbf{A} = \mathbf{GH}$，求 $\mathbf{A}^{10}$.

1）初等行变换化阶梯形

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} r_1 加至 r_3$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\alpha_1\ \alpha_2) = r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\alpha_1\ \alpha_2)=r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$$

则得证，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组

（2）求 $\mathbf{H}$，使得 $\mathbf{GH}=\mathbf{A}$，

求解方程组 $(G\,|\,A)=(\alpha_1\ \alpha_2\,|\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&-1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cccc}1&0&1&0&-1&1\\0&1&0&1&1&-1\end{array}\right)$$

得 $H=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{bmatrix}$

计算A^2 $A^2=GHGH$

$$HG=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$ 初等阵 $E_{21}(-1)$

$A^{10}=G[E_{21}(-1)]^9H=G\,E_{21}(-9)\,H$ **同样操作操作9回**

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-9&-10&10\\0&1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{bmatrix}$$