11、已知 p 为实数，$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}dx$ 收敛，则 p 的取值范围

【答案】$0<p<2$

当 $x\to 0^+$ $\frac{\arctan x}{x^p\cdot(1+x)} \sim \frac{x}{x^p\cdot 1} = \frac{1}{x^{p-1}}$ $p-1<1 \Rightarrow p<2$

当 $x\to+\infty$, $\frac{\arctan x}{x^p\cdot(1+x)} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{p+1}}$ $p+1>1\Rightarrow p>0$

综上可得到 $p\in(0,2)$

12、计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=$

【答案】$\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

答案 $\frac{1}{2}$

13、求曲线 $x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=1$ 在 $(0,1)$ 处的曲率半径 $R=$

【答案】4

1）方程两侧求导 $\cancel{2}x+\cancel{2}\sqrt{3}(y+xy')+\cancel{2}y\cdot y'=0$

代入 $x=0, y=1$, 得 $\sqrt{3}+y'=0 \Rightarrow y'=-\sqrt{3}$

2）方程两侧继续求导 $1+\sqrt{3}(y'+y'+xy'')+(y')^2+y\cdot y''=0$

代入 $x=0, y=1$ $y'=-\sqrt{3}$

代入 $x=0$、$y=1$　$y'=-\sqrt{3}$

$$1+\sqrt{3}(-2\sqrt{3})+3+y''=0 \Rightarrow y''=2$$

$$R=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(4)^{3/2}}{2}=4$$

14、$f(x,y)$ 可微，且 $df(0,0)=\pi dx+3dy$，$g(x)=f(\ln x,\sin\pi x)$，计算 $g'(1)=$

【答案】-2π

$$g'_x=f'_1\cdot\frac{1}{x}+f'_2\cdot\cos\pi x\cdot\pi$$

$$g'_x\Big|_{x=1}=f'_1-\pi f'_2=\pi-\pi\cdot 3=-2\pi$$

15、求 $f(x)=\ln(2+x)$ 在 $[0,2]$ 上的平均值为

【答案】$3\ln 2-1$

$$\overline{f(x)}=\frac{\int_0^2 f(x)dx}{2-0}=\frac{1}{2}\int_0^2\ln(2+x)dx=\frac{1}{2}\left[\ln(2+x)\cdot x\Big|_0^2-\int_0^2\frac{x}{2+x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\ln 4-\int_0^2\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\ln 2-(x-2\ln(x+2))\Big|_0^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\ln 2-2+2\ln 2\right]=3\ln 2-1$$

16、设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$，二次型 $x^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T x$ 的规范形为 y_1^2，则 $a+b=$

【答案】2

根据规范形得到二次型的秩为1，而 $r(AA^T)=r(A)=1$

提有 $\frac{a+2}{1}=\frac{3}{b}=\frac{3a}{1} \Rightarrow a+2=\frac{3}{b}=3a$

则 $a=1$ $b=1$，则 $a+b=2$