帆哥手写版2026真题解析**数三 大题**

2025年12月21日 14:21

17、

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\frac{1}{(2-x)^2}-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数

步骤一 计算积分方程

令 $\int_0^1 f(x)dx = A$

$$A=\int_0^1\frac{dx}{(x-2)^2}-A \Rightarrow 2A=-\frac{1}{x-2}\Big|_0^1=-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

得 $A=\frac{1}{4}$

$$f(x)=\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{2^n}\right]-\frac{1}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{4} \quad |x|<2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+2}} \quad |x|<2$$

18. 设 $g(x)$ 连续，$f(x)=\int_0^{x^2} g(xt)dt$，求 $f'(x)$ 的表达式，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{x}\int_0^{x^2} g(xt)\,dxt \xlongequal{令xt=u} \frac{1}{x}\int_0^{x^3} g(u)\,du & x\neq 0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}\int_0^{x^3} g(u)\,du+\frac{1}{x}\cdot 3x^2\cdot g(x^3) & x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} g(u)\,du}{x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot g(x^3)}{2x}=0\end{cases}$$

则 $f'(x)=\{-\frac{1}{x^2}\int^{x^3} g(u)du+3x\,g(x^3)$ $x\neq 0$

则 $f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x^2}\int_0^{x^3} g(u)du + 3x g(x^3) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\int_0^{x^3} g(u)du}{x^2} + 0$$

$$\overset{L'}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2\cdot g(x^3)}{2x} = 0 = f'(0)$$

则 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

19、求函数 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$ 的极值.

步骤一 获得驻点

$$\begin{cases} f'_x = 4x\cdot e^x + (2x^2-y^2)e^x = e^x\cdot(2x^2+4x-y^2)=0 & ① \\ f'_y = -2y\cdot e^x = 0 & ② \end{cases}$$

$\begin{cases} ② = 0 \Rightarrow y=0 \\ \text{当 } y=0\text{，代入①式，} 2x^2+4x=0 \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-2 \end{cases}$

获得两个驻点 $(0,0)$ 和 $(-2,0)$

步骤二 求ABC

$A = e^x(2x^2+4x-y^2+4x+4)$

$B = -2ye^x$

$C = -2e^x$

聚创考研网
聚创教育 2004
考研辅导班+juchuang911 咨询

①代入 $(0,0)$ $\quad AC-B^2 = 4\cdot(-2)-0=-8<0$ 否

②代入 $(-2,0)$ $\quad A=-4 \quad B=0 \quad C=-2e^{-2}$

$AC-B^2=8e^{-2}>0 \quad A=-4<0$

$(-2,0)$ 为极大值点，

$f(x,y)$ 在点 $(-2,0)$ 处取极大值 $8e^{-2}$.

20、

已知平面区域 $D=\{(x,y),0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\frac12\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{d(y^2+x^2+1)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac12\int_0^1 (-2)\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big|_0^1 dx$$

$$=-\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=-\left(\ln|x+\sqrt{x^2+2}|-\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right)\Big|_0^1$$

$$=-\left[(\ln(1+\sqrt3)-\ln\sqrt2)-(\ln(1+\sqrt2)\right]$$

$$=\ln\frac{2+\sqrt2}{1+\sqrt3}$$

21、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，

$\mathbf{G}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组

（2）求 $\mathbf{H}$，使得 $\mathbf{GH}=\mathbf{A}$，并求 $\mathbf{A}^{10}$.

1）初等行变换化阶梯形

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&-1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\ r_1\text{加到}r_3$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\alpha_1\ \alpha_2)=r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$$

则得证，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组

（2）求 $\mathbf{H}$，使得 $\mathbf{GH}=\mathbf{A}$，

求解方程组 $(G \mid A) = (\alpha_1\ \alpha_2 \mid \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

得 $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

计算A^2 $A^2 = GHGH$

$$HG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 初等阵 $E_{21}(-1)$

$$A^{10} = G[E_{21}(-1)]^9 H = G E_{21}(-9) H$$ **同样操作操作9回**

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -9 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & 10 & -10 \\ -1 & 7 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

22、假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值 θ 是未知参数，为估计 θ，取 n 个这种元件同时做寿命试验，试验到出现 k 个元件失效时停止

（1）若 $k=1$，失效元件的寿命记为 T，（i）求 T 的概率密度，（ii）记 $\hat{\theta}=aT$，确定 a 使得 $E(\hat{\theta})=\theta$ 并求 $D(\hat{\theta})$

（2）已知 k 个失效元件寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$，且 $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k$，似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k} e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k} t_i+(n-k)t_k\right]}$$。求 θ 的最大似然估计值

1）根据题意，

单个原件服从指数分布，$T(t) \to f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x_i \ge 0 \end{cases}$

1）根据题意，

单个原件服从指数分布 $\sim E(\frac{1}{\theta}) \Rightarrow f_{X_i}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x_i \geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$F_{X_i}(x)=P\{X\leq x\}=1-e^{-\frac{x}{\theta}}$

题干的概率密度为最小值概率密度 即 $T=\{x_1\ x_2\ x_3\cdots x_n\}_{min}$

独立同分布最小值的分布函数为 $F_{min}=1-[1-F(x)]^n=1-e^{-\frac{n}{\theta}x}$

则 $f_T(t)=(1-e^{-\frac{n}{\theta}t})'=-e^{-\frac{n}{\theta}t}(-\frac{n}{\theta})=\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}t}$

整理：$f_T(t)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}t} & t>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$E(\hat{\theta})=E(aT)=aET=a\cdot\frac{\theta}{n}=\theta \Rightarrow a=n$

$D(\hat{\theta})=D(nT)=n^2\cdot ET=n^2\cdot(\frac{\theta}{n})^2=\theta^2$

（2）已知 k 个失效元件寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$，且 $t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k$，似然函数为

$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_k+(n-k)t_k\right]}$。求 θ 的最大似然估计值

① $\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$

② $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{k}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]=0$

得：$\hat{\theta}=\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$