帆哥手写版2026真题解析**数三 填空**

2025年12月21日 14:21

11、$\int_0^1 x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=$

根据区间再现 $I=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x(x-1)(x-\frac{1}{2})+(1-x)(-x)(\frac{1}{2}-x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 0dx=0$

答案为 0

12 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=$

通分 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot\sqrt{1+x^2}-\sin x}{x\cdot\sin x\cdot\tan x}$

1) 分母 $\sim x^3$

2) 上下同阶，泰勒展开到3阶即可

$$\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)$$

$$=\cancel{x}+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^3-\cancel{x}+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\sim x^3$$

则原式= $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$

答案为 1

13. 已知 P 为实数，$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}dx$ 收敛，则 P 的取值范围

【答案】$0<p<2$

当x→ 0^+ $\frac{\arctan x}{x^p\cdot(1+x)}\sim\frac{x}{x^p\cdot 1}=\frac{1}{x^{p-1}}$ $p-1<1\Rightarrow p<2$

当 $x\to+\infty$, $\frac{\arctan x}{x^p\cdot(1+x)}\sim\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{p+1}}$ $p+1>1\Rightarrow p>0$

综上可得到 $p\in(0,2)$

14. 微分方程 $y''-2y'=e^x$ 满足条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$ 的解为 $y=$

1）齐次解 $\lambda^2-2\lambda=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=2$ $y_{齐}=C_1e^{0x}+C_2e^{2x}$

2）特解，微分算子法 $y^*=\left.\frac{e^x}{D^2-2D}\right|_{D=1}=-e^x$

则 $y=C_1+C_2e^{2x}-e^x$

3）代入初始值 $y(0)=C_1+C_2-1=1\Rightarrow C_1+C_2=2$

$y'(0)=2C_2-1=1\Rightarrow C_2=1$

则 $y=1+e^{2x}-e^x$

15、设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$，二次型 $x^T\mathbf{A}\mathbf{A}^Tx$ 的规范形为 y_1^2，则 $a+b=$

【答案】2

根据规范形得到二次型的秩为1，而 $r(AA^T)=r(A)=1$

提有 $\frac{a+2}{1}=\frac{3}{b}=\frac{-3a}{-1}\Rightarrow a+2=\frac{3}{b}=3a$

则 $a=1$ $b=1$， 则 $a+b=2$

16、设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从参数为 3 的泊松分布，且 X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$

1）根据题干有 $Cov(X,Y-X)=0$

有 $Cov(X,Y)-DX=Cov(X,Y)-1=0$，得 $Cov(X,Y)=1$

2）根据公式 $EXY=EXEY+Cov(X,Y)$

$=1\cdot 3+1=4$

2) 根据公式 $EXY = EXEY + Cov(X,Y)$

$= 1\cdot 3 + 1 = 4$

答案 4