帆哥手写版2026真题解析**数三 选择**

2025年12月21日 14:22

1、$f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线：

A、无水平渐近线，无铅直渐近线

B、有水平渐近线，有铅直渐近线

C、无水平渐近线，有铅直渐近线

D、有水平渐近线，无铅直渐近线

【答案】C

$$\lim_{x\to 0} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to\infty}\frac{e^{t}}{t}\begin{cases} t\to-\infty & 0\\ t\to+\infty & +\infty\end{cases}$$

x=0为一条垂直渐近线

泰勒展开式 $y=x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+1$

则x→∞，有斜渐近线，无水平渐近线

则选择C

2、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$ （a 为非零常数）确定，则

A、$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$　　B、$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$

C、$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$　　D、$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$

【答案】A

微分法求偏导数，**可以一次求两个偏导数**

$$dx-a\,dz=e^{y+az}(dy+a\,dz)$$

$$dx-e^{y+az}dy=a\cdot(1+e^{y+az})dz$$

则有 $dz=\frac{1}{a(1+e^{y+az})}dx-\frac{e^{y+az}}{a(1+e^{y+az})}dy$

则有 $z_x'-z_y'=\frac{1}{a}$

选择A选项

3、已知 $f(x)=\int_1^{x^3}\frac{e^t}{1+t^2}dt$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则

A、$g(0)=1$，$g'(0)=\frac{3}{2}e$

B、$g(0)=1$，$g'(0)=\cancel{\frac{2}{3}e}$ $\frac{2}{3e}$

C、$g(1)=0$，$g'(0)=\frac{3}{2}e$

D、$g(1)=\cancel{0}$，$g'(0)=\cancel{\frac{2}{3}e}$ $\frac{2}{3e}$

【答案】B

$f(1)=0 \Rightarrow \boxed{g(0)=1}$

$f'(x)=3x^2\cdot\frac{e^{x^3}}{1+x^6} \Rightarrow g'(y)\Big|_{y=0}=\frac{1}{f'(x)\Big|_{x=1}}=\frac{1}{\frac{3e}{2}}=\frac{2}{3e}$

选择B

4、

设 t 时刻某证券的交易单价为 $p(t)$，某机构持有该证券的份额为 $q(t)$，若该机构在 $t\in[0,T]$ 持续购入一定份额该证券，则这些证券的平均购入价格为

【分数】5

【选项】

A、$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$　B、$\frac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$

C、$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)q'(t)\mathrm{d}t$　D、$\frac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)q'(t)\mathrm{d}t$

【答案】D

1）单位时刻购入的证券 $p(t)dq(t)=p(t)q'(t)dt$

2）购入的总证券 $\int_0^T p(t)q'(t)dt$

3）平均价格 $\frac{\int_0^T p(t)q'(t)dt}{q(T)-q(0)}$

选择D

5、设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\1&1\\a&b\end{pmatrix}$. 若存在矩阵 B 满足 $\mathbf{A}B=C$，则

【分数】5

【选项】

A、$a=-1,b=-1$　　　　B、$a=2,b=2$

C、$a=-1,b=2$　　　　D、$a=2,b=-1$

【答案】A

【解析】存在矩阵 B 满足 $\mathbf{A}B=C$，则有 $r(A)=r(A\ C)$

$$(A|C)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\1&1&3&1&1\\1&1&1&a&b\end{array}\right)\xrightarrow{}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&-2&a-1&b-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ r_3-r_1\\ r_4-r_3\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&2&0\\0&1&2&-1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&a+1&b+1\end{array}\right)\ 2r_3加到r_4 \quad\Rightarrow a=-1\quad b=-1$$

A为三阶非零矩阵，A^*为A的伴随矩阵，$A^*=-2A$，则$A^2=$

A、$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$　　B、$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

C、$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$　　D、$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

【解析】D

$A^*=|A|A^{-1}=-2A$　两侧同乘A $\Rightarrow |A|A^{-1}A=-2A^2$

有 $A^2=-\frac{|A|}{2}E$

$|A^*|=|-2A| \Rightarrow |A|^2=-8|A| \Rightarrow |A|=-8$

则有 $A^2=4E$

选择D

7 10、设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB}+\mathbf{BA}=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2$，则 $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$ 则下列结论中错误的是

A、$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^3=\mathbf{0}$

7、10、设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB}+\mathbf{BA}=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2$，则 $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$ 则下列结论中错误的是

A、$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^3=0$

B、$\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 只有零特征值

C、$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 不能都是对角矩阵

D、$\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 只有一个线性无关的特征向量

【答案】D

$$A^2+B^2-AB-BA=0$$

$$A(A-B)+B(B-A)=0 \Rightarrow (A-B)^2=0$$

A $(A-B)^3=(A-B)^2\cdot(A-B)=0\cdot(A-B)=0$ 正确

B 令 $A-B$ 的特征值为 $\lambda \Rightarrow (A-B)^2$ 的特征值为 λ^2 而 $\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=0$

C 若 A、B 皆为对角阵 而 $A\neq B$，有 $A-B=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$ (λ_i 不全为零)

则 $(A-B)^2=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&\\&\lambda_2^2&\\&&\lambda_3^2\end{bmatrix}\neq 0$

与题干矛盾，所以A B不能都是对角阵

选择D

已知随机变量 X 和 Y 独立同分布，且 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，则

$P(XY\leqslant 1)=$

【分数】5

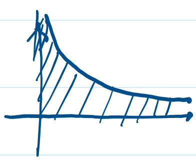
【选项】

A、$\dfrac{3}{4}$ B、$\dfrac{1}{2}$ C、$\dfrac{1}{3}$ D、$\dfrac{1}{6}$

【答案】B

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2\cdot(1+y)^2} & x>0,\ y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$P\{XY\leq 1\}=\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{dy}{(1+y)^2}$$



$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{1+y}\right)\Big|_0^{\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{1+y}\right)\Big|_0^{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

选择B

随机变量 $X\sim N(0,1)$，随机变量 $Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，且 X 与 Y 独立，则 XY 与 $X+Y$ 的相关系数为

【分数】5

【选项】

A、$\frac{\sqrt{6}}{3}$ B、$\frac{\sqrt{2}}{2}$ C、$\frac{2}{3}$ D、$\frac{1}{2}$

【答案】C

$$Cov(XY,X+Y)=Cov(XY,X)+Cov(XY,Y)$$

$$=EX^2Y-EXY\cdot EX+EXY^2-EXY\cdot EY$$

$$=EX^2\cdot EY-(EX)^2EY+EX\cdot EY^2-EX\cdot(EY)^2$$

$$=EY\cdot DX+EX\cdot DY=2\cdot\frac{1}{2}\cdot1+0=1$$

$$DXY=E(XY)^2-(EXY)^2=EX^2\cdot EY^2-0=1\cdot(DY+(EY)^2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$D(X+Y)=DX+DY=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}$$

选择C

10、设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}(k=1,2,\cdots)$，则对于任意的正整数 m,n 有

【分数】5

【选项】

A、$P\{X>m+n \mid X>m\}=P\{X>m\}$

B、$P\{X>m+n \mid X>m\}=P\{X>n\}$

C、$P\{X>m+n \mid X>m\}>P\{X>m\}$

D、$P\{X>m+n \mid X>m\}>P\{X>n\}$

【答案】D

【解析】根据条件概率公式

$$P\{X>m+n \mid X>m\}=\frac{P\{X>m+n,\ X>m\}}{P\{X>m\}}=\frac{P\{X>m+n\}}{P\{X>m\}}=\frac{\sum_{k=m+n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)}{\sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)}$$

根据等比级数的求和公式 $\sum_{k=m}^{+\infty}=\frac{a_m}{1-q}$

则有 $$\sum_{k=m+n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n+2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{m+n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n+1}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+n+1}$$

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}$$

同理有 $P\{X>n\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

特例法 具体化，令m=1，n=2则有

$$P\{X>3 \mid X>1\}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{54}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{35}{432}}{\frac{5}{12}}$$

$P\{X>1\}=\frac{5}{12}$ $\quad$ $P\{X>2\}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{8}+\frac{1}{18}=\frac{13}{72}$

$$\boxed{\text{而}\ \frac{35}{432}>\frac{5}{12}\cdot\frac{13}{72}=\frac{65}{72\cdot 12}=\frac{\frac{65}{2}}{432}}$$

则有D选项正确