2025 考研数学（三） 真题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1.在 $x \to 0^{+}$ 时，下列无穷小量中与 x 等价的是

A. $\mathrm{e}^{-\sin x}-1$．　B. $\sqrt{x+1}-\cos x$．　C. $1-\cos\sqrt{2x}$．　D. $1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$．

1．【答案】C

【解析】

$\mathrm{e}^{-\sin x}-1 \sim -\sin x \sim -x$　A 不对.

$\sqrt{x+1}-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x$　B 不对.

$1-\cos\sqrt{2x} \sim \dfrac{1}{2}(\sqrt{2\pi})^{2}=x$　C 对.

$$1-\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x-\frac{x^{2}}{2}+o\left(x^{2}\right)}{x}$$

$$=\frac{x}{2}+o(x)$$ D 不对.

2.已知函数 $f(x)=\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{t^{2}}\sin t\,\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{t^{2}}\mathrm{d}t\bullet\sin^{2}x$，则

A．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点.

B．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

C．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D．$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，$(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

【答案】B

【解析】

$$f'(x)=e^{x^{2}}\sin x,f''(x)=2xe^{x^{2}}\sin x+e^{x^{2}}\cos x$$

$$f'(0)=0,f''(0)=1>0.$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

$$g'(x)=e^{x^{2}}\sin^{2}x+\sin 2x\int_{0}^{x}e^{t^{2}}dt,$$

$$g''(x)=e^{x^2}\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x+\sin 2xe^{x^2}+2\cos 2x\int_0^x e^{t^2}dt$$

$g'(0)=0,\quad g''(0)=0,\quad g'''(0)>0$.

$(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

3.已知 k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]$

A.绝对收敛. B.条件收敛. C.发散. D.敛散性与 k 的取值有关.

3.【答案】B

【解析】

当 $k=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛

当 $k\neq 0$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

为条件收敛 十 绝对收敛

故原级数条件收敛

4.设函数 $f(x)$ 连续，$\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx=$

A. $\int_0^1 xf(x)dx$. B. $\int_0^1 (x+1)f(x)dx$.

C. $\int_0^1 (x-1)f(x)dx$. D. $\int_0^1 (1-x)f(x)dx$.

4.【答案】D

【解析】

$\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx$

$=\int_0^1\int_0^y f(x)dxdy=y\int_0^y f(x)dx\Big|_0^1-\int_0^1 y\cdot f(x)dy$

$=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 yf(y)dy$

$=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx$

5. $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是 m 维非零列向量，若 $\boldsymbol{A}$ 有 k 阶非零子式，则

A. 当 $k=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解. B. 当 $k=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

C. 当 $k<m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解. D. 当 $k<m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

5.【答案】A

【解析】

$r(A)$开k

若 $k=m$． 则 $r(A)=m \quad r(A,B)=m$

故 $r(A)=r(A,\beta)=m$,则 $Ax=\beta$ 有解

6. 设A为3阶矩阵，则“A^3-A^2”可对角化是“A可对角化”的（ ）

A. 充分但不必要条件
B. 必要但不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

6.【答案】B

【解析】

令 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$,

若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 中有 n 个线性无关的特征向量，故 $f(\boldsymbol{A})$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $f(\boldsymbol{A})$ 可对角化；若 $f(\boldsymbol{A})$ 可对角化，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{A})$ 可对角化， $\boldsymbol{A}$ 不可对角化. 综上为必要不充分条件，选 B。

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$，若 $f\left(x,y\right)=\left|xA+yB\right|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是（ ）

A. $\left(0,2-\sqrt{3}\right)$

B. $\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

C. $\left(2+\sqrt{3},4\right)$

D. $\left(0,4\right)$

7.【答案】B

【解析】

$$f(x,y)=-a\left(x^2-y^2\right)-\left(2xy-4x^2\right)=(4-a)x^2+ay^2-2xy=(x,y)\begin{pmatrix}4-a&-1\\-1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4-a>0\\ \begin{vmatrix}4-a & -1\\ -1 & a\end{vmatrix}>0\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a<4\\ 2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}\end{cases}$$，得 $a\in(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$. 选 B

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N\left(-1,1\right)$，Y 服从正态分布 $N\left(1,2\right)$，若 X 与 $X+2Y$ 不相关，则 X 与 $X-Y$ 的相关系数为（ ）

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

8.【答案】D

【解析】

$$\mathrm{Cov}(X,X+2Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

$$=DX+2\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{2}DX=-\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Cov}(X,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)=DX-\mathrm{Cov}(X,Y)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=4$$

$$DX=1\quad\therefore\rho_{X,X-Y}=\frac{\frac{3}{2}}{2\times1}=\frac{3}{4}$$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是来自总体 $B\left(1,0.1\right)$ 的简单随机样本.令 $T=\sum_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\left\{T\le1\right\}\approx$

A. $\frac{1}{e^2}$.

B. $\frac{2}{e^2}$.

C. $\frac{3}{e^2}$.

D. $\frac{4}{e^2}$.

9.【答案】C

【解析】

由题意。可知 $T \sim B(20.0.1), np = 20 \times 0.1 = 2$

$$p\{T \bullet 1\} = p\{T = 0\} + \rho\{T = 1\}$$

$$= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} = e^{-2} + 2e^{-2} = \frac{3}{e^2}$$

10. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，样本的经验分布函数为 $F_n(x)$，对于给定的 X $(0 < F(x) < 1)$，$D(F_n(x)) =$（ ）

A. $F(x)(1 - F(x))$

B. $(F(x))^2$

C. $\frac{1}{n}F(x)(1 - F(x))$

D. $\frac{1}{n}(F(x))^2$

10.【答案】C

【解析】

$F_A(x)$ 为样本中 $\{x_i \bullet x\}$ 发的概率。

$$I_i(x) = \begin{cases} 1 & x_i \le x \\ 0 & x_i > x \end{cases}. Z_i(x) \sim B[1.F(x)]$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i(x)\ D[F_n(x)] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(x)\right] = \frac{1}{n^2} nDZ_i(x) \cdot \frac{1}{n}F(x)[1 - F(x)]$$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 设 $g(x)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y = g(x)$ 的渐近线方程为______.

【答案】 $y = \pm 3$

【解析】

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x} \text{ Þ } 2y = \ln\frac{3+x}{3-x}$$

令 Þ $e^{2y} = \frac{3+x}{3-x} = \frac{6}{3-x} - 1$

Þ $x = 3 - \frac{6}{e^{2y}+1}$

$g(x)=3-\dfrac{6}{e^{2y}+1}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3,\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-3.$

故 $y=g(x)$ 渐进线方程为 $y=\pm 3$

12．设 $\int_1^{+\infty}\dfrac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则 $a=$______.

【答案】 2

【解析】 $\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x+a}\right)dx=\ln\dfrac{x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$，解得 $a=2.$

13．微分方程 $xy'-y+x^2e^x=0$ 满足条件 $y(1)=-e$ 的解为 $y=$______.

【答案】 $y=-xe^x$

【解析】

$$xy'-y+x^2e^x=0\Rightarrow y'-\frac{y}{x}=-xe^x$$

$$\Rightarrow y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}(-xe^x)dx+C\right]$$
$$=-x(e^x+C)$$

代入 $y(1)=-e$, 得 $C=0$

故解 $y=-xe^x$

14．已知函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x xe^{-x^2}\mathrm{d}t=1$ 确定，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)}=$______.

【答案】 $\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-2}$

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}=\dfrac{\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{-x^2}}{1+\dfrac{1}{z}}\Big|_{(1,1,1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\Big|_{(1,1,1)}=\frac{\left[2\mathrm{e}^{-x^2}+x\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\right](1+\frac{1}{z})+\frac{1}{z^2}(\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{-x^2})\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+\frac{1}{z})^2}\Big|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}}{4}=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{8}.$$

15．已知 $f(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 3 & 2x+1 & 1\\ 2x & -3 & 4x & -2\\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1\\ 2x & -4 & 4x & -2\end{vmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 1 & 2x+1 & 3\\ 5x+1 & -2 & 4x & -3\\ 0 & 1 & 2x+1 & 2\\ 2x & -2 & 4x & -4\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 的不同的根的个数为______.

【答案】 2

【解析】$f(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 2x+1 & 1\\ 2x & 4x & -2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$，$g(x)=x(-8x-2)=0$，可得两个根 $x_1=\frac{1}{4},x_2=0$.

16．设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，已知 $P(A)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，则在事件 A,B,C 至少有一个发生的事件下，A,B,C 中恰有一个发生的概率为______.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$$

$$=p(A)+p(B)+p(c)-p(A)p(B)-p(D)p(c)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

$$P(AB\overline{C})+p(A\overline{B}C)+P(\tilde{A}BC)=P(AB)+p(BC)$$

$$=P(A)P(B)+P(B)P(C)=\frac{1}{4}$$

$$P=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）计算 $\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x$.

17．解：

$$\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}dx=\int_0^1\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{10}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1=\frac{3}{0}\ln 2+\frac{1}{10}\pi .$$

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf\left(x\right)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln\left(1+x\right)+\ln\left(1-x\right)}=-3.$

证明：$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'\left(0\right)$.

18 解：

已知 $\ln(1+x)+\ln(1-x)=x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)=-x^2+o\left(x^2\right)$

$e^{2\sin x}=1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)=1+2\sin x+2\sin^2 x+o\left(x^2\right)$

因此，$-3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\left(1+2\sin x+2\sin^2 x+o\left(x^2\right)\right)+1}{-x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{-x^2}$$

可以得出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2\sin x}{x^2}=-5$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=-5$，

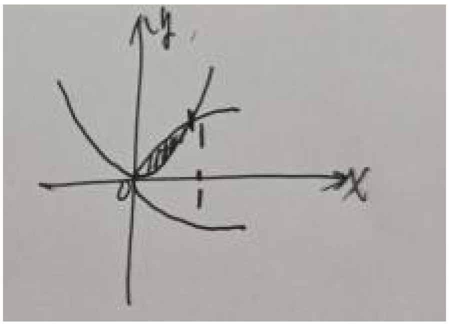
进一步可以得出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2x}{x^2}=-5$,以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=-5$，

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-2]=0$， 可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$， 故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=-5$。

19.（本题满分 12 分）已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\,|\,y^2\le x,x^2\le y\}$， 计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：

$$\iint_D(x-y+1)^2dxdy=\iint_D\left((x-y)^2+2(x-y)+1\right)dxdy$$



由轮换对称性

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy = \iint\limits_D (y-x)dxdy = 0.$$

$$\iint\limits_D (x-y)^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x-y)^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3}(y-x)^3 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 f\left[(\sqrt{x}-x)^3 - \left(x^2-x\right)^3\right]dx = \frac{1}{3}\times\frac{1}{70} = \frac{1}{210}$$

$$\iint\limits_D 1dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

则原积分 $= \dfrac{1}{210} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{71}{210}$

20.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是:对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3,当 $x_1<x_2<x_3$ 时 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

解：充分性：若对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

则在 (a,b) 内取任意的 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} < \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$$

在 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 两边同时令 $x_2 \to x_1^+$，得

$f_+'(x_1) \le \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$，两边同时令 $x_2 \to x_3^-$，得 $\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le f_-'(x_3)$，即

$f_+'(x_1) \le \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le f_-'(x_3)$，同理可得 $f_+'(x_3) \le \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le f_-'(x_5)$.因为

$\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \dfrac{f(x_5)-f(x_3)}{x_5-x_3}$，所以 $f_+'(x_1) \le f_-'(x_5)$.由 x_1, x_5 的任意性，可得 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增，充分性得证。

再证必要性，即已知 $f'(x)$ 单调递增，在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_1 \in (x_1,x_2), \xi_2 \in (x_2,x_3)$，使

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，$f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，

又由 $f'(x)$ 单调递增，且 $\xi_1 < \xi_2$ 知，$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$，即

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证。

综上所述，充要条件得证。

21.（本题满分 12 分）设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，并求矩阵 $\boldsymbol{H}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{GH}$，其中 $\boldsymbol{G} = (\alpha, \boldsymbol{\beta})$.

21. 解：

（1）因为 $r(A)=2$，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & -2a+2 & 0 \end{pmatrix}$，故 $a=1$ 时.

（2）由（1）可知，$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$，

则 α_1, α_2 为 A 的列向量组的一个极大线性无关组，$\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_2$ 且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$，

$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2$，由 $A = GH$，解得 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

22．（本题满分 12 分）投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额Y与投保人的损失额X的关系为

$Y=\begin{cases}0, X\le 100,\\ x-100, X>100.\end{cases}$ 设损失事件发生时，投保人的损失额X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$

（1）求$P\{Y>0\}$及EY.

（2）这种损失事件在一年内发生的次数记为N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为M，假设N服从参数为8的泊松分布，在$N=n\left(n\ge 1\right)$的条件下，M服从二项分布$B(n,p)$，其中$p=P\{Y>0\}$，求M的概率分布.

解：

(1) $P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}dx=\dfrac{1}{4}$

$EY=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}dx=50$

(2)

$N\sim P(8)=\{M|\ N=n\}\sim B\left(n,\dfrac{1}{4}\right)$

$P\{M=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{N=n\}\cdot P\{M=m|\ N=n)$

$=\sum_{n=m}^{\infty}\dfrac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot C_n^m\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-m}$

$=\sum_{n=m}^{\infty}\dfrac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot\dfrac{n!}{m!(n-m)!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-m}$

$=\left(\dfrac{1}{4}\right)^m e^{-8}\dfrac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\dfrac{8^{n-m}}{(n-m)!}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-m}$

$=\left(\dfrac{1}{4}\right)^m e^{-8}\dfrac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\dfrac{6^{n-m}}{(n-m)!}=\dfrac{2^m}{m!}e^{-2}$

聚创考研网 考研辅导班+juchuang911 咨询 聚创教育