考研数学大纲变动

2021 年全国硕士研究生招生考试
数学考试大纲修订说明

2020 年 9 月 9 日

《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》（以下简称《数学考试大纲》）是命题的法规文件，是命题的依据，其在 2009 年做了一次重要修订后，直至 2020 年，经过了 12 年的考研，没有做修订。这 12 年的考研数学试卷保持稳定，对硕士研究生招生考试选拔人才起到了重要的作用。随着考研形势的发展和考生人数的不断大幅增加，2021 年《数学考试大纲》做了这次重要修订，我们充分相信，这是一个更为科学的大纲，更符合未来趋势的大纲，也是完全尊重今年考生已有努力，顺利平稳开启新局面的大纲。

下面，我对 2021 年《数学考试大纲》的修订做详细说明。

一、　试卷内容和试卷结构的修订说明

1、 试卷内容的修订和说明

【修订】相比 2020 年大纲，第 5 页“三、试卷内容结构”表内：数学（一）和数学（三）中高等数学（微积分）分值比例由“56%”改为“约 60%”，线性代数分值比例由“22%”改为“约 20%”，概率论与数理统计分值比例由“22%”改为“约 20%”；数学（二）中高等数学分值比例由“78%”改为“约 80%”，线性代数分值比例由“22%”改为“约 20%”。

【说明】数学（一）、数学（二）和数学（三）的高等数学分值分别提高至约 90-94 分、120-122 分和 90-94 分，数学（一）、数学（二）和数学（三）的线性代数分值分别降低至约 28-30 分、28-30 分和 28-30 分，数学（一）和数学（三）的概率论与数理统计分值分别降低至约 28-30 分和 28-30 分。这一修订更加突出了高等数学学科在命题时的重要地位，因高等数学内容众多、题型丰富，在未来考试中会有更多难度适中、区分度好的题目出现。而线性代数和概率论与数理统计学科将会出现更少的题目，题目更为宝贵，命题点更为集中、有针对性，也相应会提高要求。

2、试卷结构的修订与说明

【修订】相比 2020 年大纲，第 5 页“四、试卷题型结构”中，单项选择题由“8 小题，每小题 4 分，共 32 分”改为“10 小题，每小题 5 分，共 50 分”；填空题由“6 小题，每小题 4 分，共 24 分”改为“6 小题，每小题 5 分，共 30 分”；解答题由“9 小题，共 94 分”改为“6 小题，共 70 分（这 70 分的分配将随着题目的难度和工作量予以科学确定，不再固定平均分配）”。

【说明】此处修订极为重要，也是需要考生高度重视的。

（1）从命题和阅卷的角度讲，客观题（选择题和填空题）的分值从原来的 56 分提高至 80 分，增加了 24 分（增幅为 43%），而主观题（解答题）的分值从原来的 94 分降低至 70 分，减少了 24 分。这一变化，充分体现了考研数学向标准化考试转变的趋势，会显著提高考试的效度和信度，减少主观题阅卷的误差等随机因素，为考研数学试卷成为合适的大规模考试的试卷做好了科学的准备。

（2）从考生备考的角度讲，这一变化是需要全面应对的。有一种说法是一定要避免的：认为什么题型无所谓，如果说无所谓，就太大意了。这一试卷结构的重要改变，专业地讲，至少有如下几个重要方面会发生重大变化：

1）没有过程分的问题

主观题减少了 24 分，客观题增加了 24 分，意味着 24 分的过程分没有了，成为了客观题后，选对了或者填对了就是满分，否则就是零分。不论你的过程是否正确，只要结果错了就是零分，对于容易粗心算错的考生，对于能够答出一部分内容、但不是所有答题环节都正确的考生，都将是一个重要的挑战。接下来的 100 天，计算必须加强，全对是唯一选择，没有退路。

2）没有提示的问题

主观题减少了 3 个大题，意味着没有提示了。考研数学的 1 个大题，一般都会设置台阶，分成 2 个甚至 3 个小问，给考生以提示或者铺垫，这是传统风格和习惯，考生在有了提示的情况下，可能会顺利答出题目，或者答出其中的某一问题。考生都熟知的是，如果有提示，就好像看了一眼答案的关键步骤，可能就立刻有了思路和方向，而现在有 24 分成为了客观题，客观题是没有任何提示的，如果没有思路，这个题目就一分也得不到了。接下来的 100 天，必须更加重视知识结构的全面性，构建完整的解题思路链条。

3）客观题知识点要求提高的问题

客观题的比例和单个题的分值如此大幅提高，很多知识点的要求也相应提高了，至少说大部分客观题要有一定程度的工作量。通俗来说，5 分就得有 5 分的分量，这就不难理解：为什么今年大纲中对考生在知识点的复习程度上，不仅有一些知识点的增加，更是在程度上做出了细致和专业的修订（比如说从了解改成了理解，从会改成了掌握，详见第二大部分）。接下来 100 天，必须全面操练有分量（要么有综合性，要么有计算量）的客观题。

4）重点与非重点调整的问题

主观题减少了 3 个，只剩下 6 个大题，传统说来的 36 讲，有 36 个部分，哪些部分可以出大题，就更需要斟酌和研究了。可以初步回答的是：重中之重的知识点、能够成为综合题的知识点、计算量大的知识点，才有可能入围这 6 个大题，而传统上送分的大题，会进入客观题，就很难出现在大题中了，考生应该更深刻想到的一点是，如果某一章你掌握得很好，它不是大题了；而某一章你掌握得不太好，它却成了大题，这样算下来，完全放弃自己掌握不好的知识，是很不利的。故，我们必须要研究 6 个大题的落脚点，并尽力锁定它们、攻克它们。接下来 100 天，考生必须要尽快有所调整。

5）全真模拟的问题

在试卷结构做了重要修改后，考生不仅要应对上面的 4 点说明，还要调整做题的时间分配，原来是主观题为主，现在是客观题为主，没有任何历年试卷可以供考生做全真模拟了，测出的分数也不具有科学的准确性了。这里要提醒已经开始做以往试卷的应届考生和再战的考生，不要再用以往的试卷进行全真模拟，而应将以往的试卷作为知识点来尽快的总结或者学习。接下来 100 天，留出足够的时间，做足够的按照新结构来命制的试卷，以适应 2021 年的考试。

样题一：设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{1}{2^x-1}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$，则(　).

$A.x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　$B.x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$C.x=0$ 是 $f(x)$ 的连续但不可导点.　　$D.x=0$ 是 $f(x)$ 的可导点.

【分析】$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{1}{2^x-1}-\dfrac{1}{2}}{x}$，令$2^x-1=t$，则$x=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln 2}$，

故$f'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\ln(t+1)}-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}}{\ln(t+1)/\ln 2}=\ln 2\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{2t-2\ln(t+1)-t\ln(t+1)}{2t\ln(t+1)}}{2\ln(t+1)}=\ln 2\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2[t-\ln(t+1)]-t\ln(t+1)}{2t\ln^2(t+1)}$

$\overset{*}{=}\ln 2\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}t^3+o(t^3)}{2t^3}=-\dfrac{1}{12}\ln 2$，故选$D$.

【注】(*)处来自泰勒公式，由$\ln(t+1)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$

故:$2[t-\ln(t+1)]-t\ln(t+1)=2[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)]-t[t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)]=-\dfrac{1}{6}t^3+o(t^3)$.

二、考试内容和考试要求的修订说明

关于知识点的修订，至少有两点提醒：

第一，知识点要求程度的提高，需高度重视，这是一个很隐蔽的事实：若增加从未考过的知识点，第一次考反而不会太难；而对于学过的知识，原本要求了解知道就行，要么不出题，要么简单再现，现在提高到掌握、会用的程度，意味着出题的可能性大大增加，且只要出题，就会有难度，就可能产生区分度，可能丢分。

第二，数学二、数学三的知识点修订，数学一同样要重视，这是由命题的趋同性所决定的。

1、数学（一），与 2020 年大纲相比：

（1）第 8 页倒数第 2 行“了解反常积分的概念，会计算反常积分”修订为“理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分”。

（2）第 12 页第 9 行“掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法”修订为“掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法”。

数学（一）			
旧大纲（2020版）			新大纲（2021版）
一元函数积分学	1	了解反常积分的概念，会计算反常积分	理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分
无穷级数	2	掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法	掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法

正项级数的积分判别法：

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，若存在$[1,+\infty)$上单调减少的非负连续函数$f(x)$，使得$u_n=f(n)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$的敛散性相同.

样题二：下列级数中发散的是（　）.

$A.\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n^3}$　　$B.\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$　　$C.\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$　　$D.\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$

【分析】对于A选项，当n充分大时，$\frac{\sqrt{\ln n}}{n^3}<\frac{\sqrt{n}}{n^3}=\frac{1}{n^{5/2}}$，

由于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$收敛，由正项级数的比较判别法知选项$A$收敛；

对于B选项，设$f_1(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则$f_1'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，

当$x\geq 2$时，$f_1'(x)<0$，即$f_1(x)$在$(2,+\infty)$内非负且单调递减，

且$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_2^{+\infty}\ln x d(-\frac{1}{x})=-\frac{\ln x}{x}\Big|_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{\ln 2+1}{2}$，由正项级数的积分判别法知选项$B$收敛；

对于C选项，记$u_n=\frac{1}{n-\ln n}$，设$f_2(x)=x-\ln x$，则$f_2'(x)=1-\frac{1}{x}$，当$x\geq 2$时，$f_2'(x)>0$，

即$f_2(x)$单调增加，于是u_n单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$，由莱布尼兹判别法知选项$C$收敛；

【分析】对于D选项，设$f_3(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$，则$f_3(x)$在$(3,+\infty)$内非负且单调递减，

且有$\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx=\int_3^{+\infty}\frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)}=\ln(\ln(\ln x))\Big|_3^{+\infty}$.

由正项级数的积分判别法知，选项D发散.

本题选D.

【注】正项级数的积分判别法是 2021 版考研大纲新增加的知识点，本题 B、D 选项按此方法处理比较方便，考生应注意.

2、数学（二），与 2020 年大纲相比：

（1）第 23 页倒数第 4 行“了解反常积分的概念，会计算反常积分”修订为“理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分”。

（2）第 24 页倒数第 9 行“了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）”修订为“理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）”。

（3）第 25 页第 7 行“理解二阶线性微分方程解的性质及解的结构定理”修订为“理解线性微分方程解的性质及解的结构”。

（4）线性代数部分“五、矩阵的特征值和特征向量”考试要求同数学（一），即第 27 页最后三行的叙述修订为第 16 页的第 6 至第 8 行三行的叙述。

（5）线性代数部分“六、二次型”考试要求同数学（一），即第 28 页的第 7 行至第 11 行的内容修订为第 16 页倒数第 10 行至倒数第 5 行的内容。

数学（二）			
旧大纲（2020版）			新大纲（2021版）
一元函数积分学	1	了解反常积分的概念，会计算反常积分	理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分
多元函数微积分	2	了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）	理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）
常微分方程	3	理解二阶线性微分方程解的性质及解的结构定理	理解线性微分方程解的性质及解的结构（删掉"二阶"、"定理"）
矩阵的特征值和特征向量	4	1.理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵特征值和特征向量. 2.理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，会将矩阵化为相似对角矩阵. 3.理解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.	（同数一） 1.理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵特征值和特征向量. 2.理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法. 3.掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.
二次型	5	1.了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换与合同矩阵的概念. 2.了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理，会用正交变换和配方法化二次型为标准形. 3.理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.	（同数一） 1.掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型的秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理. 2.掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形. 3.理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

二重积分的中值定理：若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S_D$，其中$\exists(\xi,\eta)\in D$.

样题三：设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le t^2\right\},t>0$，则极限$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)d\sigma=$_____.

【分析】由二重积分中值定理知：$\exists(\xi,\eta)\in D$，使得$\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)d\sigma = e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi t^2$.

故原极限$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi t^2}{t^2}=\pi$.

【注】

(1)当$t\to0^+$时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，于是$e^{\xi^2-\eta^2}\to1^+,\cos(\xi+\eta)\to1^-$.

(2)二重积分的中值定理是2021版考研大纲新增加的知识点，考生应稍加注意.

样题四：设A是3阶实对称矩阵，且满足$A+A^2+\frac{1}{2}A^3=0$，则关于A的秩必有（ ）.

$A.r(A)=0$ $\quad B.r(A)=1$

$C.r(A)=2$ $\quad D.r(A)=3$

【分析】由题可知$\lambda+\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^3=0$，$\lambda(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=0, \lambda^2+2\lambda+2=0, \lambda_{2,3}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i.$

因A是实对称矩阵，其特征值是实数，故$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，

A必可相似对角化$\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(A)=r(\Lambda)=0$

本题选A.

3、数学（三），与2020年大纲相比：

（1）微积分部分“一、函数、极限、连续”考试要求第5条同数学（一），即第29页第9行“5.了解数列-------”修订为第6页倒数第1行开始的叙述“5.理解极限-------”；考试要求第7条第29页12行“7.理解无穷小量的概念和基本性质-------”修订为“7.理解无穷小量、无穷大量的概念------- ”。

（2）微积分部分“二、一元函数微分学”考试要求第5、6条同数学（一），即第30页第10行开始的“5.理解罗尔-------”和“6.会用洛-------”分别修订为第8页第4行开始的“5.理解并会-------”和“6.掌握用洛-------”。

（3）微积分部分“二、一元函数微分学”考试要求第8、9条用数学（一）第8条替换，即第30页第16行开始的“8.会用导数-------”和“9.会描绘-------”修订为第8页第9行开始的“8.会用导数判断-------”。

（4）第31页第7行“了解反常积分的概念，会计算反常积分”修订为“理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分”。

（5）微积分部分“四、多元函数微积分学”考试要求第3、4条同数学（二），即第31页倒数第9行至倒数第4行的内容修订为第24页第11行至第17行的内容。

（6）第31页倒数第3行开始的“5.了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），了解无界区域上较简单的反常二重

积分并会计算”修订为“5.理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算”。

（7）第 32 页无穷级数考试要求部分的内容修订为第 12 页考试要求部分的内容，但**不包含**其中的第 6 条、第 9 条、第 11 条。编号相应调整为 1-8，并增加了“会用积分判别法”。

（8）第 33 页第 5 行至第 8 行考试要求内容修订为第 13 页考试要求部分的第 5 条、第 6 条、第 7 条。编号相应改变（修订后“常微分方程与差分方程”部分共 8 条考试要求）。

（9）线性方程组的考试内容修订为“线性方程组的--------”。

（10）第 36 页二次型考试要求部分的内容修订为数学（一）相应部分的内容，即与数学（二）的叙述一致。

数学（三）			
旧大纲（2020版）			新大纲（2021版）
函数、极限、连续	1	5.了解数列极限和函数极限（包括左极限和右极限）的概念. 7.理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.	（同数一） 5.理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系. 7.理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
一元函数微分学	2	5.理解罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理，了解泰勒(Taylor)定理、柯西(Cauchy)中值定理，掌握这四个定理的简单应用. 6.会用洛必达法则求极限.	（同数一） 5.理解并会用罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理和泰勒(Taylor)定理，了解并会用柯西(Cauchy)中值定理. 6.掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.
一元函数微分学	3	8.会用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间(a,b)内，设函数f(x)具有二阶导数，当 $f''(x)>0$,f(x)的图形是凹的；当 $f''(x)<0$,f(x)的图形是凸的），会求函数图形的拐点和渐近线. 9.会描述简单函数的图形.	（同数一的8） 8.会用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间(a,b)内，设函数f(x)具有二阶导数，当 $f''(x)>0$,f(x)的图形是凹的；当 $f''(x)<0$，f(x)的图形是凸的），会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线. 9.会描绘函数的图形.
一元函数积分学	4	了解反常积分的概念，会计算反常积分	理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分
多元函数微积分学	5	3.了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，会求多元隐函数的偏导数. 4.了解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决简单的应用问题.	（同数二） 3.了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数. 4.了解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.
多元函数微积分学	6	5.了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算.	5.理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算.
无穷级数	7	1.了解级数的收敛与发散、收敛级数的和的概念. 2.了解级数的基本性质及级数收敛的必要条件，掌握几何级数及p级数的收敛与发散的条件，掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法. 3.了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系，了解交错级数的莱布尼茨判别法. 4.会求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域. 5.了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求简单幂级数在其收敛区间内的和函数. 6.了解 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$及$(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林（Maclaurin）展开式.	（同数一，不包含数一的6，9，11） 1.理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件. 2.掌握几何级数与p级数的收敛与发散的条件. 3.掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法. 4.掌握交错级数的莱布尼茨判别法. 5.了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系. 6.理解幂级数的收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法. 7.了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和. 8.掌握 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$及$(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林（Maclaurin）展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.
常微分方程与差分方程	8	3.会解二阶常系数齐次线性微分方程. 4.了解线性微分方程解的性质及解的结构定理，会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程.	（同数一的5，6，7） 3.理解线性微分方程解的性质及解的结构. 4.掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程. 5.会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
线性方程组	9	考试内容 线性方程组的克拉默（Cramer）法则 线性方程组有解和无解的判定 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组（导出组）的解之间的关系 非齐次线性方程组的通解	考试内容 线性方程组的克拉默（Cramer）法则 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件 非齐次线性方程组有解的充分必要条件 线性方程组解的性质和解的结构 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的通解

求解高于二阶的常系数齐次线性微分方程“$y^{(n)}$”$(n\geq 3)$的情形

如$y'''+p_1y''+p_2y'+p_3y=0$

写成$\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3=0\Rightarrow\lambda_{1,2,3}$.

1.若λ为单实根，写$Ce^{\lambda x}$;

2.若λ为k重实根，写$(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$;

3.若λ为单复根$\alpha\pm\beta i$，写$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

如$y'''-y=0\Rightarrow\lambda^3=1$

$$\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow y_{齐通}=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

样题五：已知某三阶常系数齐次线性微分方程有两个特解，分别为$e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$与$e^x$，则该微分方程为:______.

【分析】由一个特解为$e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$，知特征方程有单复根$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，其特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$;

由一个特解为e^x，知特征方程有单实根1，其特征方程为$\lambda-1=0$.

即:$(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda-1)=0$,整理得 $\lambda^3-1=0$.

故该三阶微分方程为:$y'''-y=0$.

【注】2021 年考研数学大纲提高了对常系数齐次线性微分方程的阶数要求，考生应对某些高于二阶的方程熟练求解，并会根据解的结构形式反求方程。

样题六:设A为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$的三个不同特征值，其对应的特征向量为$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\alpha=\xi_1+\xi_2+\xi_3,P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)$.

(1)证明P可逆.

(2)若$(A^3-A)\alpha=0$,证明A可相似对角化并计算$|A-2E|$.

【分析】(1)由题设$A\xi_i=\lambda_i\xi_i(i=1,2,3)$,且$\alpha=\xi_1+\xi_2+\xi_3$，故$A\alpha=A(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=A\xi_1+A\xi_2+A\xi_3$
$=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3$，　　$A^2\alpha=\lambda_1^2\xi_1+\lambda_2^2\xi_2+\lambda_3^2\xi_3\cdots\cdots\cdots 3$分

设存在数k_1,k_2,k_3,使得$k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha=0\cdots\cdots\cdots(*)$

将$A\alpha,A^2\alpha$代入$(*)$式，整理得：

$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\xi_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\xi_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\xi_3=0$

因$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互不相同，故$\xi_1,\xi_2,\xi_3$线性无关.

于是,$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0,\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases}$ 系数行列式$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)\neq0$

故$k_1=k_2=k_3=0$, $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$线性无关.

于是$P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)$可逆.$\cdots\cdots\cdots 8$分

【分析】(2)由$(A^3-A)\alpha=0$得$A^3\alpha=A\alpha$，故$AP=A(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha)$

$=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{记}{=}PB$，于是$P^{-1}AP=B,A\sim B.\cdots\cdots\cdots 11$分

又$|\lambda E-B|=0$，即$\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)=0$，

$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$互不相同，$B$可相似对角化，

由传递性可知，A可相似对角化，

且对于$B-2E$，特征值为-2,-3,-1.

故$|A-2E|=|B-2E|=(-2)(-3)(-1)=-6.\cdots\cdots\cdots 14$分

样题七：设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^2}, & x\geq\theta\\0, & x<\theta\end{cases}$.其中$\theta>0$，为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本.

(1)求θ的最大似然估计量$\hat\theta$，并求常数a使得$a\hat\theta$为θ的无偏估计.

【数一用】(2)对于原假设$H_0:\theta=2$与备择假设$H_1:\theta>2$,若H_0的拒绝域为$V=\{X_{(1)}\geq3\}$，求犯第一类错误的概率α.

【数三用】(2)若常数$b>0$使得$P=\{bX_{(1)}<\theta<X_{(1)}\}=1-\alpha$,求$b$.

【分析】（1）似然函数为$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^n}{\prod\limits_{i=1}^n x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots x_n\geq\theta\\0, & 其他\end{cases}$.$\ln L(\theta)=n\ln\theta-\ln\prod\limits_{i=1}^n x_i^2$,

$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}>0$,故$L(\theta)$是$\theta$的增函数，于是$\hat\theta=X_{(1)}\cdots\cdots\cdots 5$分

且$E\hat\theta=EX_{(1)}\overset{*}{=}\int_\theta^{+\infty}x\cdot n\cdot(\dfrac{\theta}{x})^{n-1}\cdot\dfrac{\theta}{x^2}dx=\int_\theta^{+\infty}n\cdot\dfrac{\theta^n}{x^n}dx=n\cdot\theta^n\cdot\dfrac{1}{-n+1}x^{-n+1}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{n}{n-1}\theta$,

若$E(a\hat\theta)=\theta$,则$a\cdot\dfrac{n}{n-1}\theta=\theta,a=\dfrac{n-1}{n}.\cdots\cdots\cdots 10$分

【分析】【数一用】(2) $\alpha = P\left\{X_{(1)} \geq 3 \middle| \theta = 2\right\} = \int_{3}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{x^2} dx = \int_{3}^{+\infty} n \cdot \frac{2^n}{x^{n+1}} dx = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(*)$EX_{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot n \cdot [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx$.………14分

【数三用】(2) $P\left\{bX_{(1)} < \theta < X_{(1)}\right\} = P\left\{\theta < X_{(1)} < \frac{\theta}{b}\right\} = \int_{\theta}^{\frac{\theta}{b}} n \cdot \left(\frac{\theta}{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{\theta}{x^2} dx$

$= 1 - b^n = 1 - \alpha$, 故 $b = \sqrt[n]{\alpha}$.………14分